

불규칙 수열을 이용한 패턴양식의 추출

Extraction of Patterns born out of Irregular Sequences

주 저 자 : 오혁근 (Oh, Hyouk Keun)

한양여자대학교 산업디자인과 교수

ohhk2@naver.com

<https://doi.org/10.46248/kids.2020.3.157>

접수일자 2020. 8. 25. / 심사완료일자 2020. 9. 14. / 게재확정일자 2020. 9. 23.

Abstract

When conducting convergence or collaboration between disciplines, research outcomes must be derived from both disciplines, so the two disciplines are often conducted in the same position. However, this study does not require mathematical performance because it is a case of extracting visual results by borrowing a specific concept of a completely different discipline (math) as a method for the idea of a new design. Therefore, it is the method and purpose of this study to extract the unstructured pattern using the irregularity, coincidence and infinity of prime numbers corresponding to the material of the visual result. Special patterns called Prime Spiral were extracted using factors such as prime number characteristics, spiral coordinates, and interpolation curves. This work can suggest the possibility of being applied to various fields such as product graphics and media art through new aesthetic experiences related to pattern style.

Keyword

Pattern(패턴), Prime number(소수), Spiral(나선)

요약

학문 간의 융합이나 협업을 수행할 때에는 두 학문 모두에서 연구 성과가 도출되어야하기 때문에 두 학문이 동등한 위치에서 진행되는 경우가 대부분이다. 하지만 본 연구는 새로운 디자인 발상을 위한 방법으로 전혀 다른 학문(수학)의 특정개념을 차용하여 시각적 결과물을 추출하는 경우이므로 수학적 성과를 요구하지 않는다. 따라서 시각적 결과물의 재료에 해당하는 소수(prime number)의 불규칙성, 우연성, 무한성을 이용하여 정형화되지 않은 패턴의 추출작업을 수행하는 것이 본 연구의 방법 및 목적이 되며, 소수의 특성, 나선형의 좌표, 보간곡선 등의 요소를 사용하여 소수나선이라는 특별한 패턴을 추출하였다. 이러한 작업은 패턴 양식과 관계된 새로운 미적 경험을 통해 제품그래픽, 미디어 아트 등 다양한 분야로 확장적용 할 수 있다는 가능성을 제시할 수 있다.

목차

1. 서론

- 1-1. 연구 배경 및 목적
- 1-2. 연구 방법 및 범위

2. 수열의 일반적 특성

- 2-1. 수열의 특성
- 2-2. 소수수열(Sequence of primes)
- 2-3. 울람 나선(Ulam Spiral)

3. 수열의 형상화에 대한 선행연구 및 활용

- 3-1. 소수의 특성을 이용한 시각적 부호화
- 3-2. 지수의 성질을 이용한 무리수의 부호화

- 3-3. 소인수 분해를 이용한 정수의 부호화
- 3-4. 소수간격을 이용한 패턴 추출
- 3-5. 패턴화된 형상의 활용

4. 소수의 특성을 활용한 패턴 추출

- 4-1. 소수의 시각적 표현
- 4-2. 소수나선(Prime Spiral)
- 4-3. 소수나선의 변형 및 활용

5. 결론

참고문헌

1. 서론

1-1. 연구배경 및 목적

수학과 미학만을 놓고 본다면 서로 전혀 개별적인 학문으로 보이지만, 수학, 기하학, 심리학, 미학, 전산학 등의 역사적 관계를 보면 태생적으로 서로 긴밀한 연관관계를 지닌다는 것을 누구나 이해할 수 있다. 최근 협업, 융합 등의 개념이 활발하게 언급되고 있는 시점에서 순수수학과 디자인의 융합은 어쩌면 전혀 새로운 시도가 아닐 수도 있다.

본 연구의 목적은 이전 연구와 마찬가지로, 특정한 수가 지니는 성질을 분석하고, 계산하고, 창조하는 과정 속에서, 수학적 특성이 내재된 새로운 패턴양식의 추출이라는 독특한 경험을 얻기 위함이다.¹⁾ 예측되지 않는 수열의 진행을 이용한 다양하고 독특한 패턴양식의 발견은 전혀 새로운 미적경험을 창출하는 원동력이 될 수 있기 때문이다.

1-2. 연구 방법 및 범위

본 연구에서는 수학적 개념을 이용한 시각화 작업을 위하여, 소수를 나선형으로 배치하고 각 모서리 정점에 의한 보간곡선을 추출하여 불규칙성을 지닌 시각적 패턴을 추출하는 과정을 수행함으로써, 의미있는 우연적 패턴의 다양한 활용을 제시하였다. 율람 나선과 같은 수학적 연구가 소수를 나선으로 배치한다는 개념의 모티브가 된 것은 사실이지만, 본 연구의 목적이 수학적 정보를 얻으려는 것은 아니기 때문에 수학적 성과가 아닌 소수에 의한 불규칙 패턴의 추출만이 연구의 대상이 된다.

2. 수열의 일반적 특성

2-1. 수열의 특성

수열(sequence)은 어떤 규칙에 따라 차례로 진행되는 수들의 집합을 의미한다. 전항과 전전항의 합으로 진행되는 피보나치(Fibonacci) 수열도 복잡하긴 하지만 $a_n = \frac{(1 + \sqrt{5})^n - (1 - \sqrt{5})^n}{2^n \sqrt{5}}$ 이라는 일반항을 지니고 있는 수열이다. 이러한 규칙적인 수열의 시각화는 그 방법이 어떻게 진행이 예측되어지기 때문에 그 결과물

또한 어느 정도 예측할 수 있다. 하지만 소수(素數, prime number)수열이나 황금비와 관계되는 $\sqrt{5}$, 그 외 π , ϕ , e 등과 같은 무리수(irrational number)의 소수(小數, decimal)점 이하 수들의 진행은 불규칙성, 무한성 등의 특성을 지니기 때문에, 이들의 시각화에서는 예기치 못한 특별한 결과물의 추출 가능성을 예상할 수 있다.

[표 1] 무리수들의 소수부분 자릿수

무리수	소수점 이하 20자리
π (원주율)	3.14159265358979323846...
ϕ (황금비)	1.61803398874989484820...
e (자연로그 상수)	2.71828182845904523536...
$\sqrt{2}$	1.41421356237309504880...
$\sqrt{5}$	2.23606797749978969640...

2-2. 소수수열(Sequence of primes)

1을 제외한 자연수 중에서, 1과 자신 이외의 약수(고유약수)를 갖지 않는 수, 즉 1과 자신으로만 나누어 떨어지는 수를 소수(prime number)라 한다. 소수는 그 발생시기가 불규칙하고 모든 수를 이루는 단위요소가 된다는 특징을 지니고 있다. 소수를 제외한 모든 정수는 소수들의 곱으로 표현할 수 있으며, 또한 아직 증명되지는 않았지만 2를 제외한 모든 짝수는 두 소수의 합²⁾으로 이루어지기 때문이다.

이처럼, 무한하고 예측 불가능한 소수의 특성은 수학적 법칙 안에서 다양한 유기적 패턴들을 새롭게 발견할 수 있는 가능성을 제공할 수 있다.

2-3. 율람 나선(Ulam Spiral)

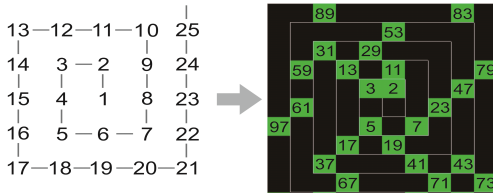
소수의 발생 주기를 발견하려는 노력은 수학계에서 상당히 오래전부터 진행되었지만 아직까지는 아무도 일정한 패턴주기를 발견하지 못한 상태이다. 수학자 율람(Stanislaw Marcin Ulam)은 1963년 어느 회의에서 낙서를 하다가 다음과 같은 우연한 패턴을 발견하게 된다. 중앙에서부터 자연수를 나선형으로 나열하고 그 중 소수만을 다른색으로 표시하니 대각선 방향으로 소수가 밀집되는 현상들을 발견한 것이다.[그림 1] 이 대각선의 수치들은 각기 다른 다항식으로 얻어지는 값이 되는데, 예를 들어 3, 13, 31, 57로 진행되는 대각선

1) 오혁근, 수, 과학 그리고 디자인, 한국학술정보, 2013, p.42

2) 이것이 골드바흐의 추측(Goldbach's Conjection)이다.

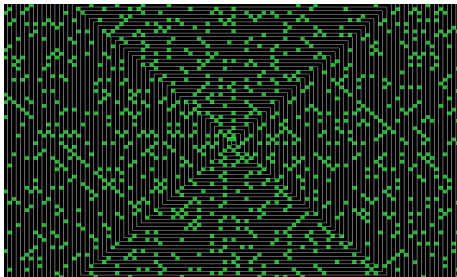
은 $4x^2 - 2x + 1$ 이라는 다항식으로 나타낼 수 있다.

1772년 스위스 수학자 오일러(Leonhard Euler)는 특정 다항식 $n^2 + n + 41$ 에서 소수의 밀도가 높게 나타난다는 것을 이미 발견한바 있으며, 이 다항식에서 n 의 값이 1, 2, 3,...,39일 때 모두 소수가 추출된다.³⁾ 물론 모든 수에서 소수가 되지는 않지만, 수학에서는 소수분포가 특히 높게 나오는(소수밀도가 높은) 다항식의 발견도 중요하게 여긴다.



[그림 1] 울람 나선의 생성

[그림 2]⁴⁾는 이를 더욱 확장한 그림인데 이 대각선 패턴들이 더욱 뚜렷해지는 경향을 볼 수 있다. 본 연구는 자연수의 나선형 배치라는 이 울람 나선의 방식에서 착안하여, 소수의 크기를 나선형으로 배치하여 작업을 진행하였다.



[그림 2] 울람 나선의 확장

3. 수열의 형상화에 대한 선행연구 및 활용

3-1. 소수의 특성을 이용한 시각적 부호화

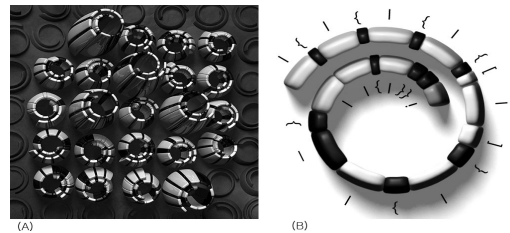
K. Huff는 소수수열의 특성을 이용하여, 다음과 같

3) Project Euler. (2020.5.4.). URL: <https://projecteuler.net/problem=27>

4) Electronics Mathematics Programs. (2020.5.12.). URL: www.alpertron.com/ar/ULAM.HTM

은 정수의 부호화에 의한 3차원 시각화 작업을 진행하였다.

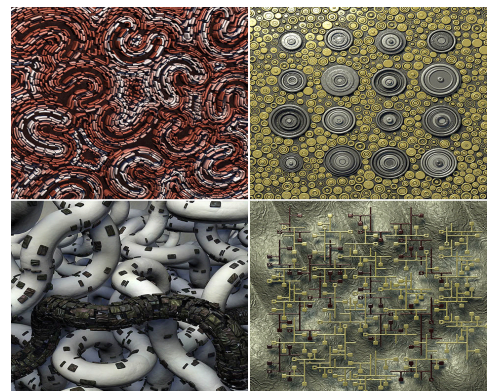
부호화된 각 대상물은 구체화 또는 단일화된 정수의 표현이고 하나 이상의 요소들(형상, 재질, 색상 등과 같은 특별한 정수의 몇몇 인코딩 부분을 표현하는 개별적인 시각적 지시들)로 구성된다.⁵⁾ [그림 3]⁶⁾은 Huff의 부호화 작업에 의한 시각적 표현의 결과물들이며, 이처럼 그의 작업은 모든 정수를 부호화하여 시각화할 수 있는 다양한 방법론의 가능성을 제공한다.



[그림 3] EPF:2003/V:A:997,141

(A) 연속된 부호화 도식의 사례와 (B) 그 중 997,151을 인코딩한 대상물의 단면

[그림 4]⁷⁾는 이와 유사한 소수의 시각적 부호화 작업을 통한 Huff의 다양한 작업물들이다.

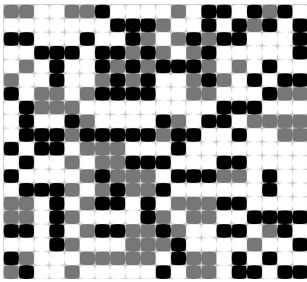


[그림 4] Huff의 작업물

- 5) 오혁근, 컴퓨터 미학에 의한 3차원 모델의 형태 구조화, 한양대학교원 박사학위논문, 2008, p.50
- 6) Kenneth A. Huff, Visually Encoding Numbers Utilizing Prime Factors In P. Fichwick, Ed., Aesthetic Computing, The MIT. Press, 2006, p.148
- 7) Organik Constructions. (2020.6.2.). URL: www.kennethahuff.com/Works/

3-2. 지수(exponent)의 성질을 이용한 무리수의 부호화

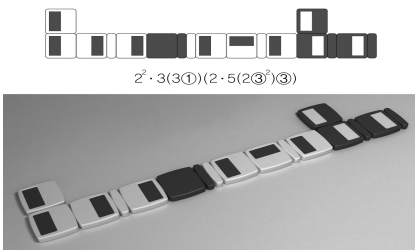
0~9까지의 정수 중에서 0, 2, 3, 5, 7을 시각화하고, 나머지 1, 4, 6, 8, 9는 각각 20, 22, 23, 32으로 표현할 수 있으므로 위의 5가지 숫자(0, 2, 3, 5, 7)로 모든 수를 나타낼 수 있다.⁸⁾ 이를 이용하여 0, 2, 3에 고유의 색상을 부여함으로써 보다 단순화된 모든 수의 시각화가 가능하다. 4x4 유닛으로 이루어진 많은 수들이 진행되면 [그림 4]에서 보는바와 같이 유닛의 독립성을 상실하고 전체가 하나의 불규칙한 패턴으로 인지된다.



[그림 5] 패턴화된 원주율(π)

3-3. 소인수 분해를 이용한 정수의 부호화

Huff의 연구와 유사한 방식으로 무작위 정수를 소인수 분해한 후, 이를 독특한 방식으로 부호화하는 과정으로 새로운 시각적 결과[그림 6]를 도출할 수 있다. 이러한 작업은 단순한 수의 시각화에 그치지 않고, 소수의 마지막 자리 수를 특별한 문자로 부호화함으로써 시각적으로 소수여부를 신속히 판별할 수 있는 수학적 의미를 지니게 된다.



[그림 6] 1,079,916의 시각화 사례(2D, 3D)

8) 오혁근, op.cit, 2013, p.51

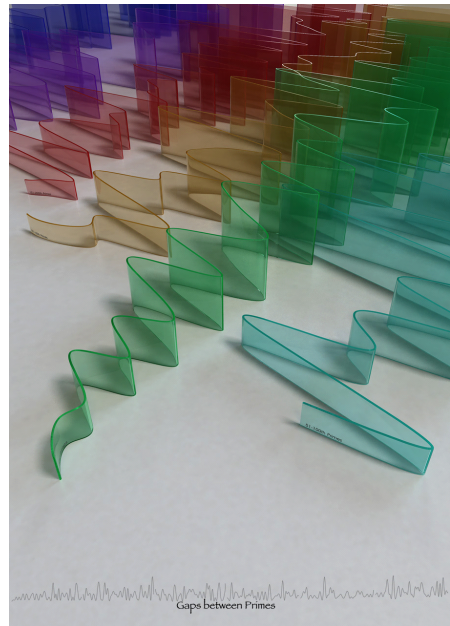
9) 오혁근, 정보민, 소인수 분해를 이용한 정수의 시각적 표현, 디지털디자인학연구 통권24호, 2009, p.329

3-4. 소수간격을 이용한 패턴 추출

발생주기가 불규칙한 소수수열의 각항 간의 차이 또한 일정한 규칙을 갖지 않는다. 1, 2, 2, 4, 2, 4, 2, 4, 6, 2, 6, 4, 2, 4,...로 진행되는 소수간격 수열은 소수 2와 소수 3의 차이인 1을 제외하고는 모두 짝수¹⁰⁾로 이루어져 있고, 소수와 마찬가지로 예측 불가능한 수열이며, 소수간격의 차이는 불규칙하나 지속적으로 증감을 반복하는 특성을 지닌다.¹¹⁾ 이러한 특성으로 인하여 소수간격 수열은 [그림 7]와 같이 불규칙한 파동 형상의 패턴을 추출할 수 있는 좋은 소재가 되며, 이 때 사용된 보간곡선의 응용은 본 연구의 일부에도 활용된다.



[그림 7] 보간곡선화된 50번째 소수까지의 소수간격



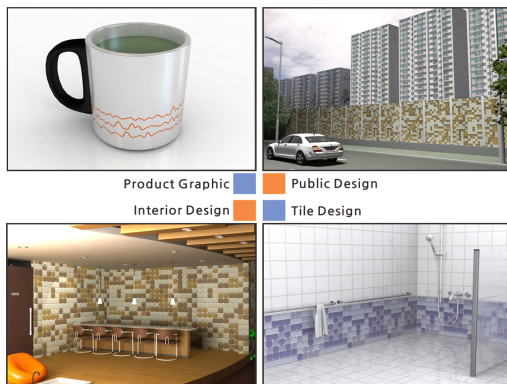
[그림 8] Gaps between Prime(오혁근, 2014)

10) 소수 2를 제외한 모든 소수는 홀수이기 때문에 그 간격은 항상 짝수일 수밖에 없다.

11) 오혁근, 수학적 개념을 형상화한 패턴양식의 활용, 디지털디자인학연구 통권42호, 2014, p.85

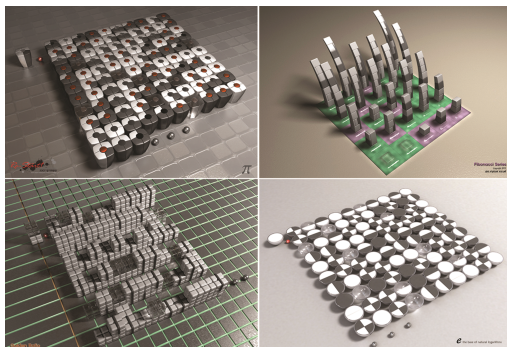
3-5. 패턴화된 형상의 활용

패턴화된 형상은 다양한 방법으로 수정될 수 있으며, 색상 또한 변경될 수 있으므로 제품그래픽, 타일, 벽지 등 패턴양식의 적용이 필요한 환경에 따라 최선의 형상, 색상, 크기의 선정이 이루어져야 한다. 물론 이 과정에서 디자이너의 역량이 두드러지게 나타나게 되므로 가장 중요한 부분이라 할 수 있다.¹²⁾ 이처럼 무질서해 보이지만 특별한 의미가 내재된 패턴으로 단 순반복에서 오는 지루함을 억제할 수 있는 장점을 지니게 된다.



[그림 9] 수학적 개념에 의해 추출된 패턴의 적용사례

또한 수의 부호화에 의한 시각화 결과물에 미적 요소를 가미하여, 수학적 의미가 내재된 패턴 이상의 창의적인 창작으로 발전할 수도 있다. [그림 10]에서 보는 바와 같이 수학과 예술의 융합은 디지털 일러스트의 훌륭한 소재가 된다.



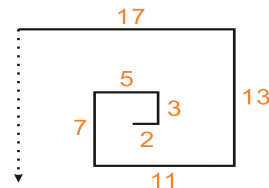
[그림 10] 디지털 일러스트(2007, 2007, 2007, 2009)

12) 오혁근, op.cit, 2014, p.85

4. 소수의 특성을 활용한 패턴 추출

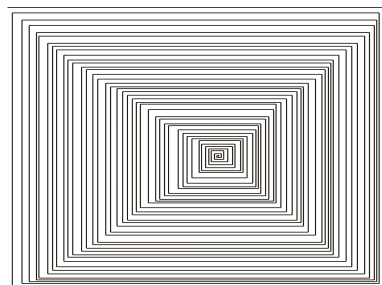
4-1. 소수의 시각적 표현

본 연구에서는 소수의 크기를 직선으로 표현하여 반시계방향으로 90도씩 꺾어 진행시키는 작업을 반복하는 것으로 시작된다.[그림 11] 이 때, 소수수열은 점점 커지기 때문에 나선형 모양이 겹치는 경우가 발생하지는 않더라도 소수의 간격이 불규칙하기 때문에 그 최소 간격을 예측할 수는 없다. 하지만 모든 소수가 홀수이므로 두 소수의 간격은 항상 2 이상이고,¹³⁾ 연속되는 세 홀수가 모두 소수인 경우는 3, 5, 7이 유일하기 때문에, 하나 건너된 소수인 서로 마주보고 있는 선분의 길이는 항상 6 이상의 차이로 증가하게 되어 평행한 두 선분 사이도 최소 6 이상을 유지하면서 점점 커지는 나선형태를 형성하게 된다.



[그림 11] 직선으로 표현된 소수의 길이

[그림 12]는 위의 과정을 160번째 소수인 941까지 진행한 결과로, 실제로 소수 3부터 941까지 평행한 두 선분 사이가 항상 6 이상의 간격을 유지하는 것을 확인할 수 있으며, 소수간격에 의한 미세한 차이에 의해 규칙적이지 않은 패턴을 표현하고 있다.



[그림 12] 160번째 소수까지(2~941)의 패턴

13) 단, 소수 2와 3의 간격은 예외이기 때문에 소수 2와 5는 그 차이가 3이 되지만, 맨 처음 시작되는 유일한 경우이므로 문제되지 않는다.

이때, 0도 방향, 90도 방향, 180도 방향, 270도 방향으로 진행하는 소수수열은 다음과 같은 계산으로 각각 구할 수 있다.

[표 2] Mathematica를 이용한 소수수열 계산

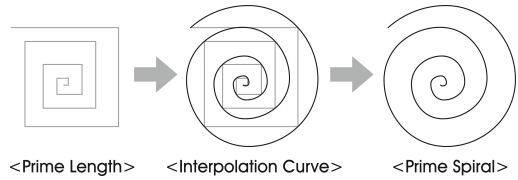
In[1]:=	data=Table[Prime[4n-3], {n, 1, 40}]
Out[1]	{2,11,23,41,59,73,97,109,137,157,179,197,2 = 27,241,269,283,313,347,367,389,419,439,46 1,487,509,547,571,599,617,643,661,691,727 ,751,773,811,829,859,883,919}
In[2]:=	data=Table[Prime[4n-2], {n, 1, 40}]
Out[2]	{3,13,29,43,61,79,101,113,139,163,181,199, 229,251,271,293,317,349,373,397,421,443,4 = 63,491,521,557,577,601,619,647,673,701,73 3,757,787,821,839,863,887,929}
In[3]:=	data=Table[Prime[4n-1], {n, 1, 40}]
Out[3]	{5,17,31,47,67,83,103,127,149,167,191,211, 233,257,277,307,331,353,379,401,431,449,4 = 67,499,523,563,587,607,631,653,677,709,73 9,761,797,823,853,877,907,937}
In[4]:=	data=Table[Prime[4n], {n, 1, 40}]
Out[4]	{7,19,37,53,71,89,107,131,151,173,193,223, 239,263,281,311,337,359,383,409,433,457,4 = 79,503,541,569,593,613,641,659,683,719,74 3,769,809,827,857,881,911,941}

4-2. 소수나선(Prime Spiral)

전산학이 기본이 되는 컴퓨터그래픽스에서는 주어진 점들을 이용하여 보간곡선(interpolation curve)¹⁴⁾과 근사곡선(approximation curves)¹⁵⁾이라는 두 가지 방식으로 부드러운 곡선을 생성한다. 3차원 컴퓨터그래픽스의 B-spline은 근사곡선의 일종이며 부드러운 곡선을 생성하는데 유리한 장점을 지니지만, 본 연구에서는 보다 직관적인 형태를 유지하기 위해 보간곡선 방식으로

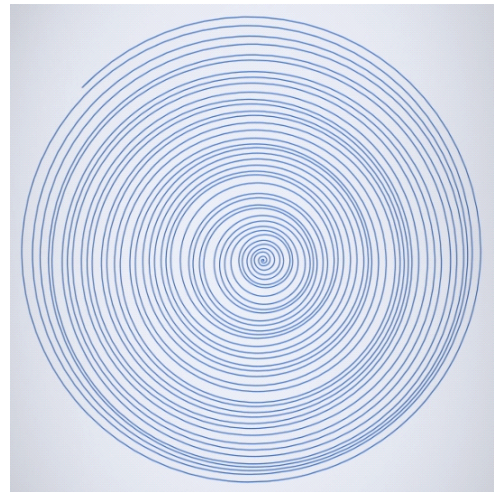
- 14) 주어진 점들을 통과하는 하나의 연결된 부드러운 곡선. 곡선의 모양을 정의하는 모든 제어점, 즉 보간점(knot) 위를 통과하는 곡선으로 대개 다차다항식의 수학 함수로 정의되며, 차수가 높을수록 모양이 더욱 부드럽게 정의된다.
네이버 지식백과 : <http://terms.naver.com>
- 15) 주어진 제어점들에 근접하는 모양의 곡선. 근사 곡선은 곡선을 정의하는 제어점을 지날 필요가 없고 단지 모양에 영향을 끼치므로 매우 부드러운 곡선을 나타낼 수 있다.
네이버 지식백과 : <http://terms.naver.com>

곡선화 작업을 수행하였다.



[그림 13] 소수나선 추출과정

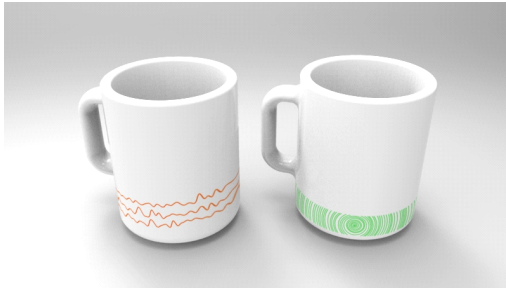
생성된 직선들만으로도 불규칙한 패턴이 만들어지지만, 주어진 점점들을 부드럽게 통과하는 보간곡선 방식으로 변환하면 보다 나선형에 가까운 형상을 추출할 수 있다.[그림 14] 이를 소수나선(Prime Spiral)이라 칭하기로 한다. 소수가 무한하기 때문에 소수나선의 크기 또한 그 범위만 확장하면 무한히 커질 수 있다.



[그림 14] 보간곡선을 적용한 160번째 소수까지(2~941)의 패턴 변환

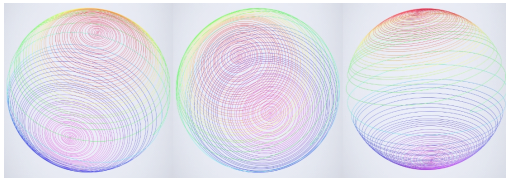
4-3. 소수나선의 변형 및 활용

수의 부호화, 소수간격 패턴 등 이전에 언급한 패턴 사례와 마찬가지로 소수나선 패턴은 그 형태적 특성에 따라 다양한 그래픽 요소로 활용되어질 수 있으며, 그 적용분야 또한 확장이 가능하다.



[그림 15] 소수간격 및 소수나선 패턴의 활용

[그림 16]은 소수나선을 3차원 구(sphere)에 투영시켜 선형 색상 그레데이션을 적용한 사례로, 영상작업이 추가되어 미디어 아트 분야로의 활용 가능성을 제시할 수도 있다.



[그림 16] 구형(sphere)화된 소수나선의 응용

5. 결론

본 연구는 소수의 불규칙성을 이용한 특이 패턴의 추출을 위하여 시작되었으며, 소수수열의 진행에 의해 점점 확산하는 직선패턴을 생성한 후, 이를 보간곡선으로 변환하여 미세하게 규칙적이지 않은 나선형 패턴을 추출하는 과정으로 진행되었다. 그 결과, 소수나선의 어느 구간을 취하더라도 불규칙한 패턴을 얻을 수 있었으며, 이는 일반 나선형 패턴에서는 볼 수 없는 현상이다. 또한 소수가 더욱 확장되면 예측 불가능한 또 다른 패턴 간격의 추출이 가능하며, 원하는 일부 구간만을 선택하여 패턴화할 수도 있다. 이러한 패턴양식은 제품그래픽이나 미디어 아트와 같은 시각적 요소로 활용할 수 있으며, 이전 연구의 결과물들과 마찬가지로 무질서해 보이는 패턴에 수학적 개념이 내포되어 있다는 것에 의미를 부여할 수 있다. 본 연구는 소수라는

소재의 제한을 두었으나, 이전 사례에서 보듯 모든 정수를 시각화할 수 있다는 것은 개인적으로 특별한 수의 시각화가 가능하다는 것을 의미하며, 이는 본인만의 특별한 시각적 패턴을 제품이나 작품에 적용할 수 있다는 장점이 될 수 있다.

본 연구의 목적이 불규칙성과 무한성을 지닌 소수수열에서 패턴 양식과 관계된 새로운 미적 요소를 창출하는 것이기 때문에 패턴을 추출해내는 전 과정에서 복잡한 수학적 계산을 사용하지는 않았지만, 적어도 기본 데이터 추출과정은 코딩과 같은 전산학적 방법이 사용되어야 두 학문의 진정한 융합이라 할 수 있을 것이다.

참고문헌

1. 오혁근, 수, 과학 그리고 디자인, 한국학술정보, 2013
2. 오혁근, 소수에 의한 무한수열의 시각적 부호화, 디지털디자인학연구 통권16호, 2007
3. 오혁근, 수학적 개념을 형상화한 패턴양식의 활용, 디지털디자인학연구 통권42호, 2014
4. 오혁근, 컴퓨터 미학에 의한 3차원 모델의 형태 구조화, 한양대학교원 박사학위논문, 2008
5. 오혁근, 정보민, 소인수 분해를 이용한 정수의 시각적 표현, 디지털디자인학연구 통권24호, 2009
6. Paul A. Fishwick, Aesthetic Computing, MA: The MIT. Press, 2006
7. www.alpertron.com.ar
8. www.kennethahuff.com
9. <https://projecteuler.net>
10. <http://terms.naver.com>